

## PROGRESIONES ARITMÉTICAS

### Problema 52:

Tres números  $a$ ,  $b$  y  $c$ , distintos de cero, están en progresión aritmética. Si aumentamos  $a$  en una unidad o aumentamos  $c$  en dos unidades, los tres valores respectivos, están en progresión geométrica. Determina los tres números.

### Solución Problema 52:

Los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  (distintos de cero) están en progresión aritmética. Supongamos que:  $a < b < c$ . Significa que:

$$a = a$$

$$b = a + d$$

$$c = b + d = a + 2d$$

Si aumentamos  $a$  en 1 unidad los tres están en progresión geométrica:

$$a+1 < b < c$$

Sabemos que en una progresión geométrica la razón es el cociente entre un término y el anterior:

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$r = \frac{a_3}{a_2}$$

Así:

$$\frac{b}{a+1} = \frac{c}{b}$$

Sustituimos los valores de  $b$  y  $c$  en función de  $a$ :

$$\frac{a+d}{a+1} = \frac{a+2d}{a+d}$$

$$(a + d)^2 = (a + 1)(a + 2d) \quad \text{ecuación 1}$$

Si aumentamos c en dos unidades, los tres valores respectivos, están en progresión geométrica:

$$a < b < c + 2$$

Igual que antes sabemos que en una progresión geométrica la razón es el cociente entre un término y el anterior:

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$r = \frac{a_3}{a_2}$$

Así:

$$\frac{b}{a} = \frac{c + 2}{b}$$

Sustituimos los valores de b y c en función de a:

$$\frac{a + d}{a} = \frac{[(a + 2d) + 2]}{a + d}$$

$$(a + d)^2 = a[a + 2d + 2] \quad \text{ecuación 2}$$

Igualando en  $(a + d)^2$  la 1 y la 2:

$$(a + 1)(a + 2d) = a[a + 2d + 2]$$

$$a^2 + a + 2ad + 2d = a^2 + 2ad + 2a$$

$$a = 2d$$

Ahora por tanteo, se dan valores a "d", y el que cumple los requisitos es:  $d = 4$

**Luego los números buscados son:**

$$\underline{a} = 2d = 2 \cdot 4 = \underline{8}$$

$$\underline{b} = a + d = 8 + 4 = \underline{12}$$

$$\underline{c} = a + 2d = 8 + 2 \cdot 4 = 8 + 8 = \underline{16}$$

Están en progresión aritmética, cuya razón es 4.

Esta es la comprobación:

Si aumentamos a en 1 unidad los tres están en progresión geométrica:

$$a+1 < b < c$$

$$8+1 < 12 < 16$$

$$9 < 12 < 16$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{9}$$

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{12}$$

$$\frac{12}{9} = \frac{16}{12}$$

$$144 = 144$$

Si aumentamos c en dos unidades, los tres valores respectivos, están en progresión geométrica:

$$a < b < c+2$$

$$8 < 12 < 16+2$$

$$8 < 12 < 18$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{8}$$

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{12}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{18}{12}$$

$$144 = 144$$