

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 50:

Hallar el valor de los ángulos interiores de un pentágono convexo, sabiendo que están en progresión aritmética y que la diferencia entre el mayor y el menor es 140° .

Solución Problema 50:

Sabemos que:

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es:

$$S = 180(n - 2)$$

En el caso del pentágono:

$$S = 180(5 - 2) = 180 \cdot 3 = 540$$

Por otra parte sabemos:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

En nuestro caso:

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot n$$

$$540 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$$

$$1080 = (a_1 + a_5) \cdot 5$$

$$\frac{1080}{5} = a_1 + a_5$$

$$a_1 + a_5 = 216 \quad \text{ecuación 1}$$

La diferencia entre el mayor y el menor es 140° :

$$a_5 - a_1 = 140 \quad \text{ecuación 2}$$

Sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$a_1 + a_5 = 216 \quad \text{ecuación 1}$$

$$a_5 - a_1 = 140 \quad \text{ecuación 2}$$

$$2a_5 = 356$$

$$a_5 = \frac{356}{2} = 178^\circ$$

Luego a_1 será:

$$a_5 - a_1 = 140 \quad \text{ecuación 2}$$

$$a_1 = a_5 - 140$$

$$a_1 = 178 - 140$$

$$a_1 = 38^\circ$$

Como sabemos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$178 = 38 + (5 - 1) \cdot d$$

$$178 = 38 + 4d$$

$$4d = 178 - 38 = 140$$

$$d = \frac{140}{4} = 35$$

Luego el valor de los ángulos es:

$$a_1 = 38^\circ$$

$$a_2 = a_1 + d = 38 + 35 = 73^\circ$$

$$a_3 = a_2 + d = 73 + 35 = 108^\circ$$

$$a_4 = a_3 + d = 108 + 35 = 143^\circ$$

$$a_5 = 178^\circ$$

$$S = 180(5 - 2) = 180 \cdot 3 = 540 = 38 + 73 + 108 + 143 + 178 = 540$$