

PROBLEMAS CON PLANTEO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

Problema 17:

La suma de los valores absolutos de las cuatro cifras que componen un número es igual a 29. Si se cambia la cifra que ocupa el lugar de las centenas por la que ocupa el lugar de las unidades, y recíprocamente, se obtiene un número que excede al dado en 99, y si ese cambio se efectuará con las cifras que ocupan los lugares de las decenas y millares, el número resultante, aumentado en 3960, sería igual al dado. Si al número dado se le resta 1179, resulta aquél invertido. ¿Cuál es el número?

Solución Problema 17:

Sea $xyzt$ el número buscado de manera que:

x = unidades de millar

y = centenas

z = decenas

t = unidades

El enunciado nos dice:

1.- La suma de los valores absolutos de las cuatro cifras que componen un número es igual a 29, luego:

$$x + y + z + t = 29 \text{ ecuación 1}$$

2.- Si se cambia la cifra que ocupa el lugar de las centenas por la que ocupa el lugar de las unidades, y recíprocamente, se obtiene un número que excede al dado en 99, luego

$$xyzt = xtzy - 99 \text{ ecuación 2}$$

3.- Si ese cambio se efectuará con las cifras que ocupan los lugares de las decenas y millares, el número resultante, aumentado en 3960, sería igual al dado, luego

$$xyzt = zyx + 3960 \text{ ecuación 3}$$

4.- Si al número dado se le resta 1179, resulta aquél invertido.

$$xyzt - 1179 = tzyx + 3960 \text{ ecuación 4}$$

Luego ya tenemos planteadas las cuatro ecuaciones para resolver el problema:

$$x + y + z + t = 29 \text{ ecuación 1}$$

$$xyzt = xtzy - 99 \text{ ecuación 2}$$

$$xyzt = zyxt + 3960 \text{ ecuación 3}$$

$$xyzt - 1179 = tzyx \text{ ecuación 4}$$

expresando los números en función de las unidades:

$$x + y + z + t = 29 \text{ ecuación 1}$$

$$1000x + 100y + 10z + t = 1000x + 100t + 10z + y - 99 \text{ ecuación 2}$$

$$1000x + 100y + 10z + t = 1000z + 100y + 10x + t + 3960 \text{ ecuación 3}$$

$$1000x + 100y + 10z + t - 1179 = 1000t + 100z + 10y + x \text{ ecuación 4}$$

Simplificando la ecuación 2

$$\cancel{1000x} + 100y + \cancel{10z} + t = \cancel{1000x} + 100t + \cancel{10z} + y - 99$$

$$100y - y + t - 100t = -99$$

$$99y - 99t = -99$$

$$y - t = -1$$

$$\mathbf{t - y = 1}$$

Simplificando en la ecuación 3

$$1000x + \cancel{100y} + 10z + \cancel{t} = 1000z + \cancel{100y} + 10x + \cancel{t} + 3960$$

$$1000x - 10x + 10z - 1000z = 3960$$

$$990x - 990z = 3960$$

$$x - z = 4$$

Simplificando la ecuación 4

$$1000x + 100y + 10z + t - 1179 = 1000t + 100z + 10y + x$$

$$1000x - x + 100y - 10y + 10z - 100z + t - 1000t = 1179$$

$$999x + 90y - 90z - 999t = 1179$$

$$111x + 10y - 10z - 111t = 131$$

Tenemos las siguientes ecuaciones simplificadas:

$$x + y + z + t = 29 \text{ ec 1}$$

$$t - y = 1; t = y + 1 \text{ ec 2}$$

$$x - z = 4; x = 4 + z \text{ ec 3}$$

$$111x + 10y - 10z - 111t = 131 \text{ ec 4}$$

Sustituyendo ec 2 y ec 3 en ec 1, tenemos

$$4 + z + y + z + y + 1 = 29$$

$$2z + 2y = 29 - 4 - 1 = 24$$

$$z + y = 12 \text{ ec 5}$$

Sustituyendo ec 2 y ec 3 en ec 4, tenemos

$$111(4 + z) + 10y - 10z - 111(y + 1) = 131$$

$$444 + 111z + 10y - 10z - 111y - 111 = 131$$

$$101z - 101y = 131 + 111 - 444 = -202$$

$$101z - 101y = -202$$

$$z - y = -2 \text{ ec } 6$$

Sumamos ec 5 y ec 6

$$z + y = 12 \text{ ec } 5$$

$$z - y = -2 \text{ ec } 6$$

Tenemos

$$2z + \cancel{y - y} = 12 - 2$$

$$2z = 10$$

$$z = \frac{10}{2} = 5$$

Sustituyendo su valor

$$5 + y = 12$$

$$y = 12 - 5 = 7$$

Sustituyendo su valor

$$t = y + 1 = 7 + 1 = 8$$

Sustituyendo su valor

$$x = 4 + z = 4 + 5 = 9$$

Luego el número pedido es: 9758