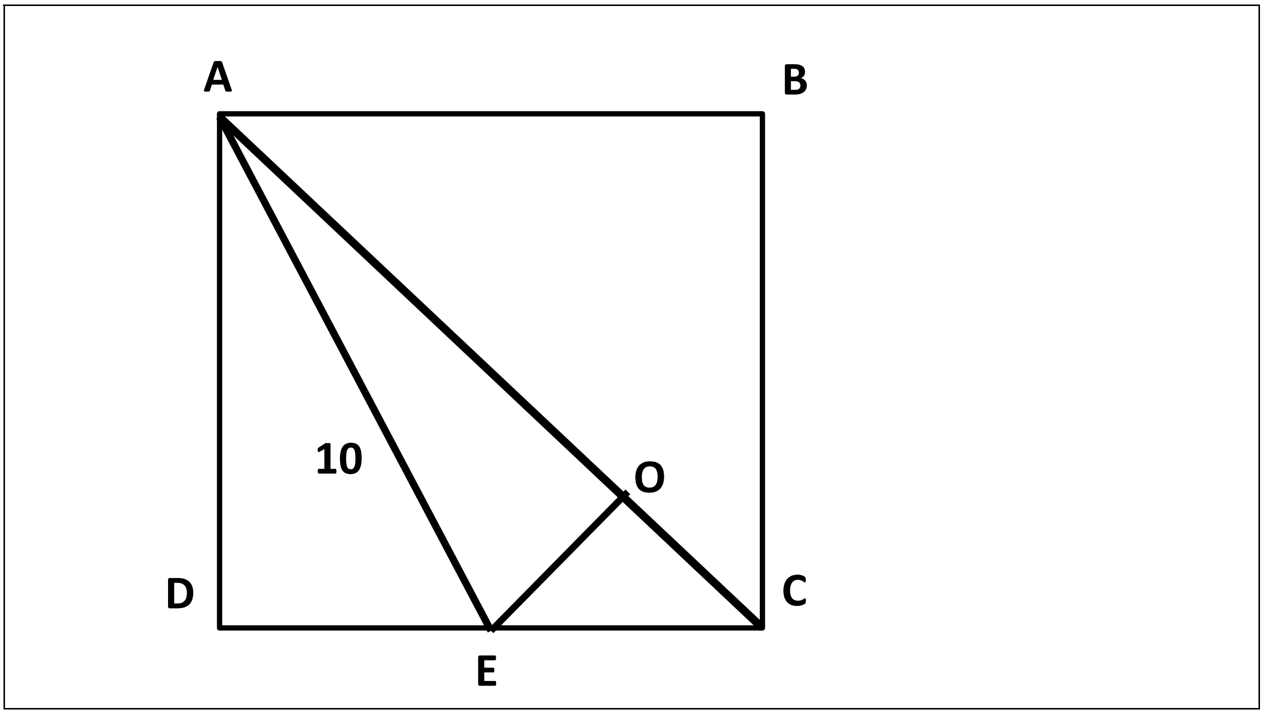
Problema 139:

Sea ABCD un cuadrado. Desde el punto A se traza una recta al punto E que está ubicado sobre el lado CD.
Desde el punto E se traza la perpendicular a la diagonal AC que lo intercepta en el punto O.
Hallar el área de AOE, si CE=ED y AE=10m

Solución Problema 139:



Interpretación del enunciado:

ABCD es el cuadrado que aparece dibujado.

El punto E está situado sobre el lado CD

Desde el punto A al punto E se traza una recta: AE, cuyo valor es 10 m.

Al decir el enunciado que CE=DE, significa que el punto E está situado en la mitad del lado CD.

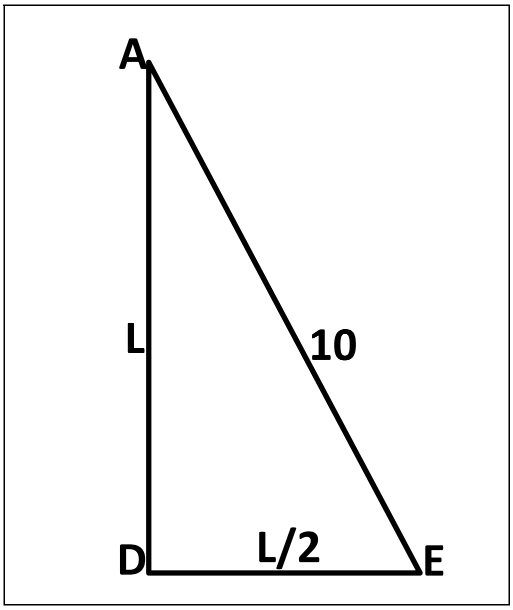
Desde el punto E se traza una perpendicular a la diagonal AC a la que corta en el punto O, por tanto el ángulo AOE es un ángulo recto, y por tanto el triángulo AOE es un triángulo rectángulo:

Hipotenusa: AE

Cateto mayor : AO

Cateto menor: OE.

Tomando el triángulo rectángulo ADE, podemos calcular el lado del cuadrado ABCD:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$10^2 = L^2 + (\frac{L}{2})^2$

$100 = L^2 + \frac{L^2}{4}$

$400 = 4L^2 + L^2$

$5L^2 = 400$

$L^2 = \frac{400}{5}$

$L^2 = 80$

$\boldsymbol{L} = \sqrt{80} = \boldsymbol{4\sqrt{5}}$

Luego el lado del cuadrado ABCD mide

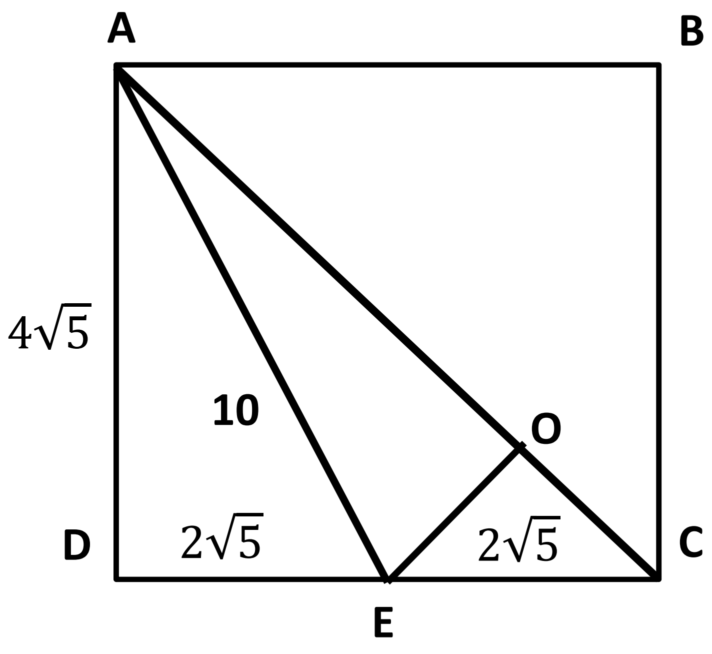
$L = 4\sqrt{5}$

Por tanto, la distancia CE y ED miden la mitad, es decir.

$CE = 2\sqrt{5}$

$ED = 2\sqrt{5}$

El cuadrado ABCD queda:



Ahora podemos calcular la diagonal AC mediante el teorema e Pitágoras:

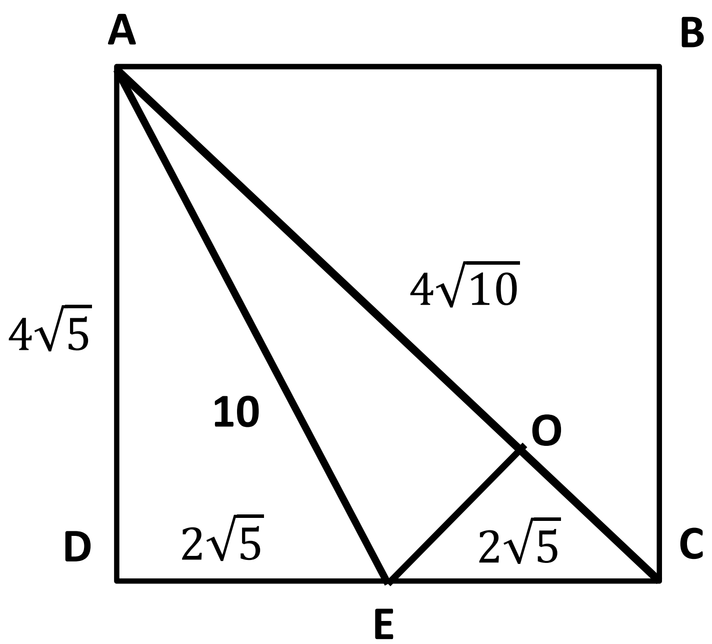
$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$AC^2 = (4\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 16.5 + 16.5 = 80 + 80 = 160$

$AC^2 = 160$

$\boldsymbol{AC} = \sqrt{160} = \boldsymbol{4\sqrt{10}}$

El cuadrado ABCD queda:



Como el ángulo AOE es de 90º, quiere decir que el ángulo COE también es de 90º, por lo que el triángulo COE es un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es EC, y los catetos son OC y OE.

Por otra parte al ser el ángulo AOE es de 90º, quiere decir que el triángulo AOE es rectángulo, cuya hipotenusa es AE, y los catetos son AO y OE.

Tenemos:

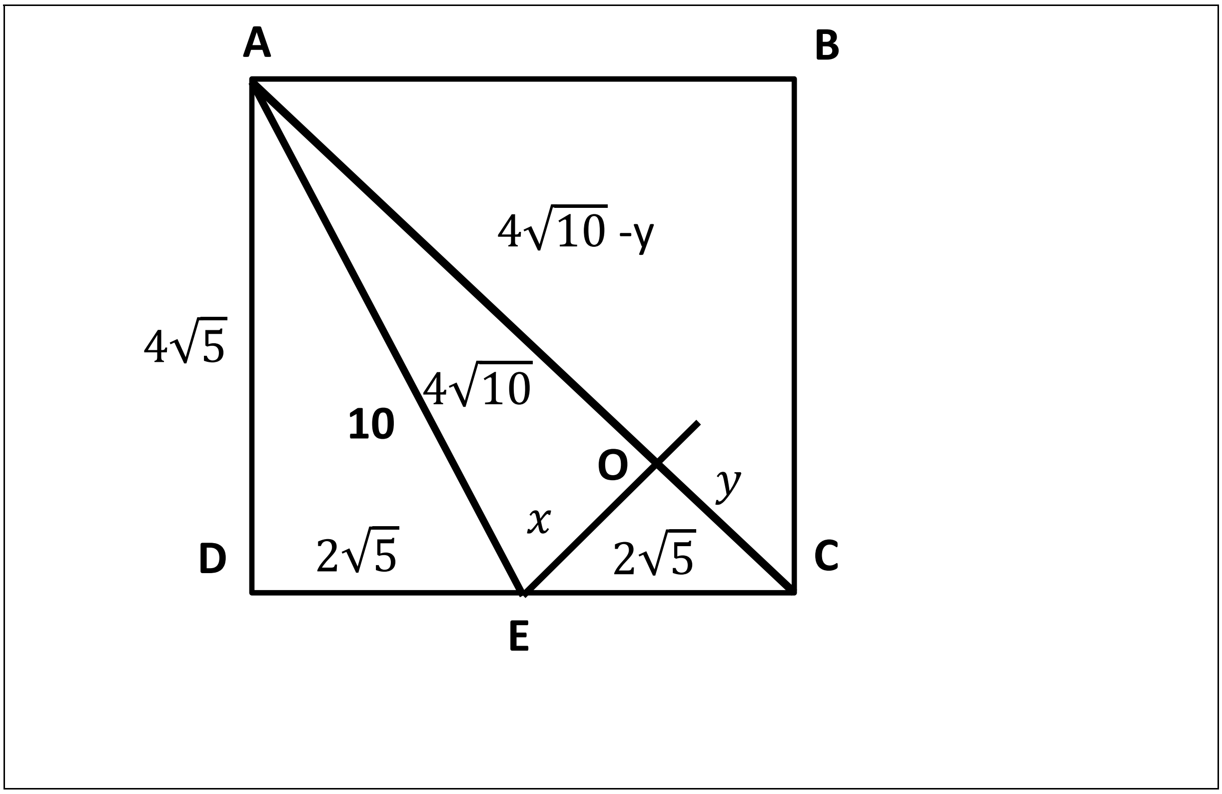
OE le llamamos x

OC le llamamos y

AO= AC-OC= $4\sqrt{10} - y$

Por tanto:

El cuadrado ABCD queda:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AOE tenemos:

$AE^2 = AO^2 + OE^2$

$10^2 = (4\sqrt{10} - y)^2 + x^2 \; ecuación \; 1$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo COE tenemos:

$CE^2 = CO^2 + OE^2$

$(2\sqrt{5})^2 = y^2 + x^2 \; ecuación \; 2$

De la ecuación despejo x:

$x^2 = (2\sqrt{5})^2 - y^2$

$x^2 = 10^2 - (4\sqrt{10} - y)^2$

Igualando

$(2\sqrt{5})^2 - y^2 = 10^2 - (4\sqrt{10} - y)^2$

$$20 - y^2 = 100 - [(4\sqrt{10})^2 + y^2 - 2(4y\sqrt{10})]$$

$$20 - y^2 = 100 - [160 + y^2 - 8y\sqrt{10}]$$

$$20 - y^2 = 100 - 160 - y^2 + 8y\sqrt{10}$$

$$20 = -60 + 8y\sqrt{10}$$

$$8y\sqrt{10} = 80$$

$$y = \frac{80}{8\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$$

Sustituimos su valor en:

$$x^2 = (2\sqrt{5})^2 - y^2$$

$$x^2 = (2\sqrt{5})^2 - \sqrt{10}^2 = 20 - 10 = 10$$

$$x = \sqrt{10}$$

Por tanto, el triángulo AOE está formado por:

Hipotenusa AE= 10 m

Cateto mayor: AO= AC-OC= $4\sqrt{10} - y = 4\sqrt{10} - \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

Cateto menor: OE= $x = \sqrt{10}$

Por tanto el área del triángulo AOE es:

Su área es la mitad del producto de los dos lados que forman el ángulo recto (catetos *AO* y OE).

$$\boldsymbol{A} = \frac{AO.OE}{2} = \frac{3\sqrt{10} + \sqrt{10}}{2} = \frac{4\sqrt{10}}{2} = \mathbf{2\sqrt{10}}$$