

PROBLEMAS CON PLANTEO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

Problema 124:

Hallar un número de tres cifras, sabiendo: que la cifra de las unidades es igual al producto de las otras dos, que la cifra de las decenas es la media proporcional entre las otras dos y que la inversa de la cifra de las centenas es igual a la inversa de la cifra de las decenas, más el doble de la inversa de la cifra de las unidades.

Solución Problema 124:

Sea "xyz" las cifras que componen el número pedido.

Sea "x" la cifra de las centenas.

Sea "y" la cifra de las decenas.

Sea "z" la cifra de las unidades.

El enunciado nos dice que:

La cifra de las unidades es igual al producto de las otras dos:

$$z = xy \text{ ecuación 1}$$

La cifra de las decenas es la media proporcional entre las otras dos:

Media proporcional es cada uno de los términos medios de una proporción cuando son iguales. Así, en la proporción $12/6 = 6/3$ la media proporcional es 6

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$y^2 = xz \text{ ecuación 2}$$

la inversa de la cifra de las centenas es igual a la inversa de la cifra de las decenas, más el doble de la inversa de la cifra de las unidades.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \text{ ecuación 3}$$

Sustituimos el valor de "z" de la ecuación 1 en la ecuación 3:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \text{ ecuación 4}$$

De la ecuaciones 1 tomamos el valor de "z" en función de "x" e "y" y lo sustituimos en la ecuación 2:

$$z = xy \text{ ecuación 1}$$

$$y^2 = xz \text{ ecuación 2}$$

Así,

$$y^2 = xz = x(xy) = x^2 y$$

Luego

$$y = x^2 \text{ ecuación 5}$$

Ahora sustituimos el valor de "y" de la ecuación en la ecuación 4, y tenemos:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \text{ ecuación 4}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

Operando sobre esta ecuación tenemos:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ solución válida}$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ solución no válida}$$

Para $x=2$

$$y = x^2 \text{ ecuación 5}$$

$$y = 2^2 = 4$$

$$z = xy \text{ ecuación 1}$$

$$z = xy = 2 \cdot 4 = 8$$

Luego el número pedido es: **248**