

FRACCIONES

Problema 52:

Simplifica la fracción:

$$\frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}$$

Solución Problema 52:

$$\frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)} = \frac{abx^2 + aby^2 + xya^2 + xyb^2}{abx^2 - aby^2 + xya^2 - xyb^2}$$

$$\frac{abx^2 + x(ya^2 + yb^2) + aby^2}{abx^2 + x(ya^2 - yb^2) - aby^2}$$

Ahora resolvemos numerador y denominador como una ecuación de 2º grado en "x"

Numerador:

$$abx^2 + x(ya^2 + yb^2) + aby^2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(ya^2 + yb^2) \pm \sqrt{(ya^2 + yb^2)^2 - 4xab(aby^2)}}{2ab} = \\ &= \frac{-(ya^2 + yb^2) \pm \sqrt{y^2a^4 + y^2b^4 + 2y^2a^2b^2 - 4y^2a^2b^2}}{2ab} \\ &= \frac{-(ya^2 + yb^2) \pm \sqrt{y^2a^4 + y^2b^4 - 2y^2a^2b^2}}{2ab} \\ &= \frac{-(ya^2 + yb^2) \pm \sqrt{(ya^2 - yb^2)^2}}{2ab} \\ &= \frac{-(ya^2 + yb^2) \pm (ya^2 - yb^2)}{2ab} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-ya^2 - yb^2 + ya^2 - yb^2}{2ab} = \frac{-2yb^2}{2ab} = \frac{-yb}{a}$$

$$x_2 = \frac{-ya^2 - yb^2 - ya^2 + yb^2}{2ab} = \frac{-2ya^2}{2ab} = \frac{-ya}{b}$$

Luego la ecuación de 2º grado del numerador se puede expresar en factores como:

$$abx^2 + x(ya^2 + yb^2) + aby^2 = \left(x + \frac{yb}{a}\right)\left(x + \frac{ya}{b}\right)$$

Ahora resolvemos el denominador como una ecuación de 2º grado en "x"

denominador:

$$abx^2 + x(ya^2 - yb^2) - aby^2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(ya^2 - yb^2) \pm \sqrt{(ya^2 - yb^2)^2 + 4xab(aby^2)}}{2ab} = \\ &= \frac{-(ya^2 - yb^2) \pm \sqrt{y^2a^4 + y^2b^4 - 2y^2a^2b^2 + 4y^2a^2b^2}}{2ab} \\ &= \frac{-(ya^2 - yb^2) \pm \sqrt{y^2a^4 + y^2b^4 + 2y^2a^2b^2}}{2ab} \\ &= \frac{-(ya^2 - yb^2) \pm \sqrt{(ya^2 + yb^2)^2}}{2ab} \\ &= \frac{-(ya^2 - yb^2) \pm (ya^2 + yb^2)}{2ab} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-ya^2 + yb^2 + ya^2 + yb^2}{2ab} = \frac{2yb^2}{2ab} = \frac{yb}{a}$$

$$x_2 = \frac{-ya^2 + yb^2 - ya^2 - yb^2}{2ab} = \frac{-2ya^2}{2ab} = \frac{-ya}{b}$$

Luego la ecuación de 2º grado del denominador se puede expresar en factores como:

$$abx^2 + x(ya^2 - yb^2) - aby^2 = \left(x - \frac{yb}{a}\right) \left(x + \frac{ya}{b}\right)$$

Por tanto la fracción inicial la podemos poner:

$$\frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)} = \frac{\left(x + \frac{yb}{a}\right) \left(x + \frac{ya}{b}\right)}{\left(x - \frac{yb}{a}\right) \left(x + \frac{ya}{b}\right)} = \frac{\left(x + \frac{yb}{a}\right)}{\left(x - \frac{yb}{a}\right)} =$$

$$\frac{ax + yb}{ax - yb}$$

Luego

$$\frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)} = \frac{ax + yb}{ax - yb}$$