PROBLEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Problema 78:

$(7\mathrm{a}-2)\mathrm{x}^2-(5\mathrm{a}-3)x+1=0$

$8\mathrm{bx}^2-(4\mathrm{b}+2)x+2=0$

Determinar los valores que deben tener a y b para que las dos ecuaciones precedentes tengan las mismas raíces.

Solución Problema 78:

Sean a_1, b_1 y c_1 los coeficientes para la ecuación 1,

$(7\mathrm{a}-2)\mathrm{x}^2-(5\mathrm{a}-3)x+1=0 \ \ ecuación\ 1$

$a_1=(7\mathrm{a}-2)$

$b_1= \ \ -(5\mathrm{a}-3)$

$c_1=1$

Sean x_{11} y x_{12} las soluciones de la ecuación 1

Vamos a aplicar las relaciones entre coeficientes y soluciones de las ecuaciones de 2º grado:

$$x_{11}+x_{12}=\frac{-[\,-(5\mathrm{a}-3)]}{(7a-2)}=\frac{5\mathrm{a}-3}{(7a-2)}\ ecuación\ 3$$

$$x_{11}.x_{12}=\frac{1}{(7a-2)}\ ecuación\ 4$$

Ahora hacemos lo mismo para la ecuación 2:

Sean a_2, b_2 y c_2 los coeficientes para la ecuación 2,

$$8\mathrm{b}x^2 - (4\mathrm{b} + 2)x + 2 = 0 \ \ ecuación\ 2$$

$$a_2 = 8$$

$$b_2 = \ \ -(4\mathrm{b} + 2)$$

$$c_2 = 2$$

Sean x_{21} y x_{22} las soluciones de la ecuación 2

Vamos a aplicar, de nuevo, las relaciones entre coeficientes y soluciones de las ecuaciones de 2º grado:

$$x_{21} + x_{22} = \frac{-[\,-(4\mathrm{b} + 2)]}{8b} = \frac{4\mathrm{b} + 2}{8b} \ ecuación\ 5$$

$$x_{21}.x_{22} = \frac{2}{8b} = \frac{1}{4b} \ ecuación\ 6$$

Como el enunciado nos dice: las dos ecuaciones tengan las mismas raíces, hacemos:

$$x_{11} = x_{21}$$

$$x_{12} = x_{22}$$

Por tanto, podemos poner

$$x_{11} + x_{12} = \frac{5\mathrm{a} - 3}{(7a - 2)}$$

$$x_{11} + x_{12} = \frac{4\mathrm{b} + 2}{8b}$$

Luego,

$$\frac{5\mathrm{a} - 3}{(7a - 2)} = \frac{4\mathrm{b} + 2}{8b} \ ecuación\ 7$$

Y con respecto al producto de las raíces:

$$x_{11}.x_{12}=\frac{1}{(7a-2)}$$

$$x_{11}.x_{12}=\frac{1}{4b}$$

Luego:

$$\frac{1}{(7a-2)}=\frac{1}{4b}\quad ecuación\ 8$$

Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones formado por la 7 y 8:

$$\frac{5\mathrm{a}-3}{(7a-2)}=\frac{4\mathrm{b}+2}{8b}\ ecuación\ 7$$

$$\frac{1}{(7a-2)}=\frac{1}{4b}\quad ecuación\ 8$$

Simplificando le ecuación 7:

$$\frac{5\mathrm{a}-3}{(7a-2)}=\frac{4\mathrm{b}+2}{8b}=\frac{\cancel{2}(2\mathrm{b}+1)}{\cancel{2}x4b}=\frac{2\mathrm{b}+1}{4b}=\frac{1}{4b}\ (2b+1)$$

$$\frac{5\mathrm{a}-3}{(7a-2)}=\frac{1}{4b}\ (2b+1)ecuación\ 9$$

Pero en la ecuación 8 tenemos:

$$\frac{1}{(7a-2)}=\frac{1}{4b}\quad ecuación\ 8$$

Podemos sustituir el valor de 1/4b en la ecuación 9

$$\frac{5\mathrm{a}-3}{(7a-2)}=\frac{1}{4b}\ (2b+1)=\frac{(2b+1)}{(7a-2)}$$

$$\frac{5\mathrm{a}-3}{(7a-2)}=\frac{(2b+1)}{(7a-2)}$$

Simplificamos 7a -2 en ambos miembros:

$$5\mathrm{a} - 3 = 2\mathrm{b} + 1 \;\; \text{ecuación } 10$$

De la ecuación 8 despejamos b:

$$\frac{1}{(7a-2)} = \frac{1}{4b} \;\; ecuación\ 8$$

$$\mathrm{b} = \frac{7\mathrm{a}-2}{4} \;\; ecuación\ 11$$

Y sustituyo su valor en la ecuación 10

$$5\mathrm{a} - 3 = \cancel{2}\frac{7\mathrm{a}-2}{\cancel{2}x2} + 1$$

$$5\mathrm{a} - 3 = \frac{7\mathrm{a}-2}{2} + 1 \;=\; \frac{7\mathrm{a}-2+2}{2} = \frac{7\mathrm{a}}{2}$$

$$5\mathrm{a} - 3 = \frac{7\mathrm{a}}{2}$$

$$10\mathrm{a} - 6 = 7\mathrm{a}$$

$$3\mathrm{a} = 6$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$$

Sustituimos su valor en la ecuación 11

$$\mathrm{b} = \frac{7\mathrm{a}-2}{4} \;\; ecuación\ 11$$

$$\mathbf{b} = \frac{14-2}{4} \;=\; \frac{12}{4} = \mathbf{3}$$

Por tanto los valores de “a” y “b” que hacen que las ecuaciones 1y 2 tengan las mismas raíces son:

a= 2

b= 3