

PROBLEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Problema 72:

Resolver:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 65$$

$$x + y + z = 13$$

$$yz = 12$$

Solución Problema 72:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 65 \text{ ecuación 1}$$

$$x + y + z = 13 \text{ ecuación 2}$$

$$yz = 12 \text{ ecuación 3}$$

De la ecuación 1 y 2 despejamos x:

$$x^2 = 65 - y^2 - z^2 \text{ ecuación 4}$$

$$x = 13 - y - z \text{ ecuación 5}$$

Elevamos al cuadrado la ecuación 5

$$x^2 = (13 - y - z)^2$$

Operamos en el segundo miembro de la ecuación

$$x^2 = (13 - y - z)(13 - y - z) = 169 - 13y - 13z - 13y + y^2 + zy - 13z + zy + z^2$$

$$x^2 = 169 - 26y - 26z + y^2 + z^2 + 2zy \text{ ecuación 6}$$

A continuación sustituimos el valor de yz de la ecuación 3 en la ecuación 6

$$x^2 = 169 - 26y - 26z + y^2 + z^2 + 2 \cdot 12$$

$$x^2 = 169 - 26y - 26z + y^2 + z^2 + 24 \text{ ecuación 7}$$

Ahora sustituimos el valor de x de la ecuación 4 en la ecuación 7

$$65 - y^2 - z^2 = 169 - 26y - 26z + y^2 + z^2 + 24$$

Operamos sobre esta ecuación:

$$2y^2 + 2z^2 - 26y - 26z + 128 = 0$$

$$y^2 + z^2 - 13y - 13z + 64 = 0 \text{ ecuación 8}$$

A continuación resolvemos el sistema formado por la ecuación 3 y la ecuación 8

$$yz = 12 \text{ ecuación 3}$$

$$y^2 + z^2 - 13y - 13z + 64 = 0 \text{ ecuación 8}$$

Despejamos y en la ecuación 3:

$$y = \frac{12}{z}$$

Y sustituimos su valor en la ecuación 8:

$$\left(\frac{12}{z}\right)^2 + z^2 - 13\left(\frac{12}{z}\right) - 13z + 64 = 0$$

A continuación operamos:

$$\frac{144}{z^2} + z^2 - \frac{156}{z} - 13z + 64 = 0$$

$$\frac{144}{z^2} + z^2 - \frac{156}{z} - 13z + 64 = 0$$

$$144 + z^4 - 156z - 13z^3 + 64z^2 = 0$$

$$z^4 - 13z^3 + 64z^2 - 156z - 144 = 0$$

A continuación la resolvemos mediante la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r} 1 \quad -13 \quad +64 \quad -156 \quad 144 \\ 2 \quad \quad 2 \quad -22 \quad 84 \quad -144 \\ \hline 1 \quad -11 \quad 42 \quad -72 \quad 0 \\ 6 \quad \quad 6 \quad -30 \quad 72 \\ \hline 1 \quad -5 \quad 12 \quad 0 \end{array}$$

Por tanto el valor de z es:

$$z_1 = 2$$

$$z_2 = 6$$

Para $z = 2$, sustituimos su valor en la ecuación 3 y tenemos:

$$y = \frac{12}{z} = \frac{12}{2} = 6$$

Ahora sustituimos el valor de "y" y "z" en la ecuación 5

$$x = 13 - y - z = 13 - 6 - 2 = 5$$

Para $z = 6$, sustituimos su valor en la ecuación 3 y tenemos:

$$y = \frac{12}{z} = \frac{12}{6} = 2$$

Ahora sustituimos el valor de "y" y "z" en la ecuación 5

$$x = 13 - y - z = 13 - 2 - 6 = 5$$

Luego los valores buscados son:

$$x=5; y= 2; z= 6$$

y

$$x=5; y= 2; z= 6$$