PROBLEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Problema 51:

Hállense dos números, sabiendo que su suma, su producto y la diferencia de sus cuadrados son iguales entre sí.

Solución Problema 51:

Del enunciado del problema se deduce:

$$x + y = xy = x^2 - y^2$$

Por tanto podemos poner:

$$x + y = xy \quad ecuación\ 1$$

$$x + y = x^2 - y^2 \quad ecuación\ 2$$

Los primeros términos de ambas ecuaciones son iguales:

$$xy = x^2 - y^2$$

Pasando xy al segundo término obtenemos una ecuación de segundo en "x":

$$xy = x^2 - xy - y^2$$

Calculamos "x" como una ecuación de 2º grado:

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{y} \pm \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} = \frac{\mathrm{y} \pm \sqrt{5y^2}}{2} = \frac{\mathrm{y} \pm \mathrm{y}\sqrt{5}}{2} =$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\mathrm{y} + \mathrm{y}\sqrt{5}}{2} \quad \text{ecuación } 3$$

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{\mathrm{y} - \mathrm{y}\sqrt{5}}{2} \quad \text{ecuación } 4$$

A continuación sustituimos ambos valores en la ecuación 1 para obtener el valor de "y":

Para $\boldsymbol{x_1} = \frac{y+y\sqrt{5}}{2}$ ecuación 3

$x + y = xy \quad ecuación\ 1$

$$\frac{y + y\sqrt{5}}{2} + y = (\frac{y + y\sqrt{5}}{2})y$$

Operando en la ecuación

$$y + y\sqrt{5} + 2y = y^2 + y^2\sqrt{5}$$

$$3y + y\sqrt{5} = y^2 + y^2\sqrt{5}$$

$$y^2 + y^2\sqrt{5} - 3y - y\sqrt{5} = 0$$

Sacando factor común "y":

$$y(y + y\sqrt{5} - 3 - \sqrt{5}) = 0$$

De donde:

y= 0

$$y + y\sqrt{5} - 3 - \sqrt{5} = 0$$

$$y(1 + \sqrt{5}) - 3 - \sqrt{5} = 0$$

$$y = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$$

Racionalizando:

$$y = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}\right) = \frac{3 + \sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 5}{1 - 5} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-4}$$

$$\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4}=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$\boldsymbol{y_1}=\frac{(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}})}{\mathbf{2}}$$

Obtenido el valor de "y" lo sustituimos en la ecuación 3, para hallar el valor de "x":

$$x_1=\frac{\mathrm{y}+\mathrm{y}\sqrt{5}}{2}=\frac{\frac{(1+\sqrt{5})}{2}+\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\sqrt{5}}{2}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{2}}{2}=$$

$$\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Luego los números pedidos son

$$\boldsymbol{y_1}=\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{x_1}=\frac{\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}$$

Pero al ser una ecuación de 2º grado tiene dos soluciones , por tanto, hacemos el mismo procedimiento para el otro valor de "x" en la ecuación 4:

$$\boldsymbol{x_2}=\frac{\mathrm{y}-\mathrm{y}\sqrt{5}}{2}\ \text{ecuación 4}$$

A continuación sustituimos este resultado en la ecuación 1 para obtener el valor de "y":

$$x+y=xy\quad ecuación\ 1$$

$$\frac{\mathrm{y}-\mathrm{y}\sqrt{5}}{2}+y=\frac{\mathrm{y}-\mathrm{y}\sqrt{5}}{2}y$$

$y - y\sqrt{5} + 2y = y^2 - y^2\sqrt{5}$

$3y - y\sqrt{5} = y^2 - y^2\sqrt{5}$

$y^2 - y^2\sqrt{5}\ - 3y + y\sqrt{5} = 0$

Sacando factor común "y":

$y(y - y\sqrt{5}\ - 3 + \sqrt{5}) = 0$

De donde:

y=0

ó

$y - y\sqrt{5}\ - 3 + \sqrt{5} = 0$

$y(1 - \sqrt{5}\,) - 3 + \sqrt{5} = 0$

$$y = \frac{3 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$$

Racionalizando:

$$y = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right) = \frac{3 - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5}{1 - 5} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{-4}$$

$$\frac{-2\left(1 - \sqrt{5}\right)}{-4} = \frac{\left(1 - \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\boldsymbol{y_2} = \frac{(\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{5}})}{\mathbf{2}}$$

Obtenido el valor de "y" lo sustituimos en la ecuación 4, para hallar el valor de "x":

$$x_2 = \frac{y - y\sqrt{5}}{2}\ \text{ecuación 4}$$

$$x_2 = \frac{\frac{(1-\sqrt{5})}{2} - \frac{(1-\sqrt{5})}{2}\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}-(\sqrt{5}-5)}{4}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} =$$

$$\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4} = \frac{\left(\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{5}}\right)}{\mathbf{2}}$$

Luego los números pedidos son

$$\boldsymbol{y_2} = \frac{(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}})}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{\left(\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{5}}\right)}{\mathbf{2}}$$